Universidade de São Paulo em São Carlos   Lista 5, resolver até 18.3.2016

FCM0114 Eletromagnetismo

Nome:

1. **Teorema integral de Stokes**

Calcule para o campo seguinte,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} yz \\ azx \\ xy \end{pmatrix}$$

usando a lei de Stokes a integral de caminho $\oint \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}$ para uma integração ao longo de um círculo com raio R em torno do eixo z na posição $z = h$.

2. **Teorema integral de Stokes**

Calcule a integral $\oint_S x(\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y)\, d\mathbf{S}$, onde S seja o círculo unitário no plano x-y.

3. **Teorema integral de Gauß**

Calcule o fluxo do campo vetorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ através de uma esfera com raio R
a. pela integral de superfície e
b. com a ajuda do teorema de Gauß pela integral de volume sobre o divergente.

4. **Teorema integral de Gauß**

Seja F a superfície de um volume arbitrário V. Determine para $\mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, bx_2, cx_3)$ a validade da relação

$$\oint_F d\mathbf{F} \cdot \mathbf{A} = (a + b + c)V \ .$$

5. **A distribuição δ**

As seguintes propriedades são, entre outras, características para a função δ de Dirac,

$$\int_a^b f(x)\delta(x - c)\ dx = \begin{cases} f(c) & \text{se } c \in [a, b] \\ 0 & \text{senão} \end{cases} \ .$$

Sendo $g(x)$ uma função com passagens de zero simples x_n ($g(x_n) = 0$ e $g'(x_n) = \frac{dg}{dx}(x_n) \neq 0$), temos

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x - x_n) \ .$$

Use setas relações para resolver as seguintes integrais,
a. $\int_{-2}^{5} \ dx \ (x^2 - 5x + 6) \ \delta(x - 3)$.
b. $\int_{-\infty}^{\infty} \ dx \ x^2 \ \delta(x^2 - 3x + 2)$.

6. **A distribuição** δ

a. Calcule $\int_0^\pi \ d\theta \ \sin^3\theta \ \delta(\cos\theta - \cos\frac{\pi}{3})$.
b. Seja agora $\mathbf{r}_0$ um vetor três-dimensional fixo com coordenadas cartesianas x_0, y_0 e z_0. Para a função δ três-dimensional vale,

$$\int_V f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)d^3\mathbf{r} = \begin{cases} f(\mathbf{r}_0) & \text{se } \mathbf{r}_0 \text{ é dentro do volume } V \\ 0 & \text{senão} \end{cases} \ .$$

Em coordenadas cartesianas, $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \equiv \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$. Exprime $\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ em coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) como produto de três funções uni-dimensionais δ em $\rho - \rho_0$, $\varphi - \varphi_0$ e $z - z_0$.

7. **A distribuição** δ

Calcule as seguintes expressões

$$\int_{-1}^{+1} \delta(x)[f(x) - f(0)] \ dx \ ,$$
$$\int_{-1}^{3} (x^3 - x)\sin\left(\tfrac{\pi}{4}x\right)\delta(x - 2) \ dx \ ,$$
$$\int_0^{2\pi} \sin x \ \delta(\cos x)dx \ ,$$
$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(r - R)d^3\mathbf{r} \ ,$$
$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(r - R)\delta(z)d^3\mathbf{r} \ ,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d}{dx}\delta(x)\right) f(x)dx \ , \qquad \text{Ajuda: integração parcial}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dx^n}\delta(x)\right) f(x)dx \ ,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \hat{f}(k)dk \ . \qquad \text{Ajuda: } 1 = e^{ik0} \qquad \text{e mostre que vale: } \hat{1} = \frac{1}{2\pi}\delta(x) \ .$$